МАТЕМАТИЧЕСКА ТЕОРИЯ НА УПРАВЛЕНИЕТО*

*М. Хазевинкел***

Увод. Беше време, когато за прилагане на математиката в науки като техниката, химията или биологията и голяма част от физиката бе достатъчна доста скромна математическа подготовка. Нещо от линейната алгебра, малко диференциални уравнения, устойчивост и трансформации, може би малко комплексни функции — това бе достатъчно, за да се посрещнат повечето от задачите. Действително, почти не се прилагаха средствата на „чистата" математика, развити в области като теория на числата, алгебрична геометрия, диференциална и алгебрична топология, алгебрична K-теория, теория на операторите и функционален анализ и т. н. И това бе съвсем неотдавна (вж. напр. [3, 4]).

Нещата се промениха през последния четвърт век. Заедно с бързо нарастващата математизация на много области се стига до разместване в самата математика (—), която се използва в приложенията и днес е осъзнато, че потенциално всеки математически метод може да намери успешно приложение. В това отношение е интересно да се сравни например съдържанието на списание по химична физика от преди десет години с това от миналата година. Или по-уместно в случая е да сравним програмите на десетата конференция по управление и последната двайсет и втора конференция, проведена през декември 1983 г. в Сан Антонио Тексас[1].

Област, в която се прилага цялата математика и която от своя страна поставя много интересни нови математически проблеми, е математическата (електро-) техниката, наречена сега математическа теория на системите (вж. например съдържанието на [1])[2].

В тези няколко страници ще се опитам да илюстрирам казаното по-горе върху няколко подбрани примера на проблеми заедно с кратко обсъждане на използваната математика.

1. Системи. Основен предмет на изследване е т. нар. система, която е устройството, приемащо входни сигнали (или управления), които са функции на времето, и въз основа на тях излъчващоизходни сигнали (или наблюдавани сигнали), също функции на времето.

Да разгледаме например система, описана с краен брой обикновени диференциални уравнения като (1.1) или (1.2) по-долу

$$\dot{x}=f(x,u),\ y=h(x),\ x\in R^n,\ u\in R^m,\ y\in R^p, \tag{1.1.}$$

$$x_{k+1}=f(x_k,u_k),\ y_k=h(x_k),\ x\in R^n,\ u\in R^m,\ y\in R^p. \tag{1.2}$$

Тук u са входните сигнали или управленията, y — изходните или наблюдавани сигнали и x — променливи, описващи действителното състояние на системата. Като пример с историческо значение да разгледаме полета на самолет. В случая u са управляващите въздействия, x е състоянието на самолета на езика на механиката, т. е. съответните скорости и положения и y е наблюдаваното състояние, т. е. количествата, изведени от x, за които има измерителен уред.

---

* Mathematical Control Engineering. CWI Amsterdam. Note PM-N8402 (August) — превод със съкращения. — *Бел. ред.*

** Michael Hazewinkel, директор на Центъра по Математика и Информатика в Амстердам, гл. редактор на известната серия *Mathematics and Its Applications* на изд. Reidel (Dordrecht). — *Бел. ред.*

Като следващ пример ще вземем химически реактор със смесител или дестилационна колона, за които x са концентрациите на реагентите и величини като налягане и температура, u е входът на системата, т. е. различни реактиви и може би източник на топлина, а y са величините, измервани от уредите за наблюдение на реакцията и/или крайния продукт на реакцията.

Уравненията (1.1) и (1.2) описват един сравнително неособено сложен клас от системи. Съществуват много по-сложни математически обекти, описващи динамични процеси. Например вместо (1.1) и (1.2) може да имаме частни диференциални уравнения[3], уравнения с отклонен аргумент, интегродиференциални уравнения [5]. Усложнения от този тип обаче невинаги са необходими, за да бъде интересна съответната математика. Дори в най-простия случай, когато системата е линейна, (§ 3 подолу) се прилагат мощни математически методи.

Един от начините да се интерпретира например уравнение (1.1) е то да се разглежда като механическа система в смисъл на класическата механика, където u са външните сили и y са тези променливи на състоянието, които са непосредствено наблюдаеми. В известен смисъл тази постановка е по-добра и по-точна от традиционно възприетата в механиката, където няма външни сили и неявно се предполага, че всички променливи на състоянието са наблюдаеми [2].

Описанието на системата (1.1) включва семейство обикновени диференциални уравнения, параметризирани с управлението u и може да се очаква, че тук ще бъдат полезни идеи от теория на особеностите, теория на бифуркациите, разпространение на особеностите и т. н. Това изглежда е така, но засега този подход не е сериозно изучен. Без съмнение причина за това отчасти е кръгът от въпроси, с които се свързват системите (1.1) и (1.2). Както ще видим по-долу, тези въпроси са различни от класическите проблеми на анализа като съществуване и единственост на решението и свойства на това решение.

2. Някои типични проблеми в математическата теория на управлението. За определеност да разгледаме отново системата (1.1). Често е зададено подходящо начално състояние $x_0 \in R^n$, което е точка на равновесие (тя може и да не е устойчива). Навсякъде по-долу ще имаме предвид тази начална задача.

2.1. Стабилизация с обратна връзка на състоянието.

Първият въпрос, възникващ по естествен начин, е следният: Може ли да се намери функция $k\colon R^n \to R^m$, т. е. изобразяваща състоянието във входен сигнал, която стабилизира системата, т. е. такава, че x_0 е устойчива или асимптотически устойчива точка на равновесие на системата $\dot{x}=f(x, k(x))$.

2.2. Стабилизация с обратна връзка на изхода.

При проектиране на системи за управление е естествено да се използва обратна връзка на състоянието. В други случаи обаче по-естествено е да се прилага обратна връзка на изхода. Тогава възниква следният проблем: съществува ли изображение $k\colon R^p \to R^m$, изобразяващо изхода във входен сигнал, такова, че x_0 е устойчива или асимптотично устойчива точка на равновесие на уравнението $\dot{x}=f(x, k(h(x)))$.

2.3. Достижимост. За дадено $x \in R^n$ да се покаже, че съществува управление[4] $u(t)$, такова, че решението на $\dot{x}=f(x, u(t))$, $x(0)=x_0$ достига точката x.

2.4. Наблюдаемост. Нека са дадени x_1, $x_2 \in R^n$ и управлението $u(t)$. Нека $y_i(t)$ е изходен сигнал за $\dot{x}=f(x, u(t))$, $x(0)=x_i$, $i=1, 2$. Проблемът е кога от $x_1 \neq x_2$ следва съществуването на такова t, че $y_1(t) \neq y_2(t)$. Ако е така, казваме, че релацията $x_1 \neq x_2$ е наблюдаема.

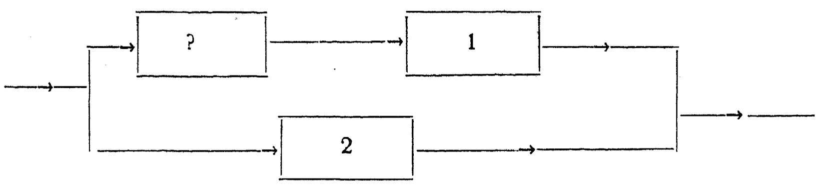
2.5. Реализуемост. Системата (1.1) или (1.2) с начално състояние x_0 дефинира (в общия случай нелинеен) оператор, действащ от пространството на управления U (например функции $[0, +\infty) \to R^m$, които са C^∞ на компактен носител) в съответното пространство на изходните функции Y (например функции $[0, \infty) \to R^m$, които са C^∞). Наистина нека е дадено $u(t) \in U$. Нека $x(t)$ е решение на $\dot{x}=f(x, u(t))$, $x(0)=x^0$ (при предположение, че такова съществува и е единствено). Ако $y(t)=h(x(t))$, тогава съответният оператор V изобразява $u(t)$ в $y(t)$. Нека сега е даден оператор $V: U \to Y$. Тогава проблемът за реализуемост на V е: съществува ли система (от даден конкретен тип), за която V е оператор вход—изход[5].

2.6. Декомпозиция. Проблемът е дали е възможно например с помощта на обратна връзка така да се раздели системата на две подсистеми, че входът на коя да е от тях да не влияе на изхода на другата.

2.7. Потискане на смущенията. Да предположим, че освен управленията са дадени и входни въздействия v, които се разглеждат като смущения, т. е дадена е системата $\dot{x}=f(x, u(t), v(t))$, $y=h(x)$. Има ли такава функция $k(x)$, че ако $\dot{x}=f(x, k(x), v(t))$, $y=h(x)$, смущенията v да не влияят на изхода y? Може да се постави и въпросът, дали за всяко ε може да се намери такова $k_\varepsilon(x)$, че v да има ε-влияние върху изхода y.

2.8. Оптимално управление и синтез. Нека в допълнение към (1.1) са дадени целево множество, например $x_1 \in R^n$, и критерий за качество на управлението $J(x(\cdot), u(\cdot))$. Проблемът е да се намери такова управление, което превежда състоянието на системата от x_0 в x_1, при което стойността на J е минимална. Необходими условия за оптималност се дават от принципа за максимум на Понтрягин. Този принцип обаче не може да се използва, ако се търси управление във вид на обратна връзка $u=k(x)$. Възниква въпросът, дали оптималното управление $u^{(x)}$ за коя да е начална точка x може да бъде представено във вид на обратна връзка. Отговорът на този въпрос е тясно свързан с проблема за достатъчно добра стратификация (в смисъл на диференциална топология) на множеството от тези $x \in R^n$, които могат да бъдат достигнати за време t [10, 11].

2.9. Моделиране по образец. Нека са дадени две системи 1 и 2, символично представени на фиг. 1.



Фиг. 1

Проблемът е да се намери такава система ? че последователно свързаната двойка ? и 1 да бъде идентична с 2 в смисъл на вход—изход. Това, разбира се, е само една от възможностите за моделиране по образец.

Всички проблеми по-горе с изключение може би на 2.7 имат детерминистично естество и се отнасят до детерминирани системи. Разглеждали са се и системи от вида (1.1), в които u се интерпретира като стохастичен процес, например бял шум. Тогава x и y са стохастични процеси и всички по-горни проблеми могат да се поставят отново с това допълнително усложнение.

В допълнение съществува група от типично стохастични проблеми, от които ще отбележа тук само един.

2.10. Филтрация. Разглеждаме системата $\dot{x}=f(x, u)$, където u е бял шум и изходът също е смущаван с бял шум, $y=h(x)+v$. Проблемът е при дадени наблюдения y_s, $0 \leqq s \leqq t$, да се пресметне условното очакване на $x(t)$.

3. Линейни системи. Крайномерните линейни системи имат вида

$$\dot{x}=Ax+Bu,\ y=Cx,\ x_0=0. \tag{3.1}$$

Тези системи са толкова прости, че съответното изображение вход—изход може да се запише в явен вид

$$y(t)=\int_0^t Ce^{(t-\tau)A}\,Bu(\tau)\,d\tau. \tag{3.2}$$

На пръв поглед е трудно да се повярва, че за изследване на такива системи е необходима сложна математика. Действително за тази система повече от въпросите, представени в 2, имат удовлетворителни отговори и съществуват разумни алгоритми за пресмятане на конкретните решения. Заслужава да се отбележи, че проблемът за обратна връзка на изхода все още е решен само в някои частни случаи.

Решенията на по-горните проблеми се отнасят обаче за фиксирани системи. Нещата драстично се променят, ако се разглежда семейство от линейни системи (където A, B и C зависят от даден параметър). Възниква например проблемът, дали може да се конструира стабилизираща обратна връзка във вид на матрица K, която зависи по непрекъснат начин от параметрите при условие, че $A+BK$ е устойчива[6]. Друг проблем е дали винаги може да се намери фиксирано K, което стабилизира системата за всички стойности на параметрите от дадено компактно множество. Отговорът на последния въпрос гласи: невинаги; за доказателство се използват пространства на Стейн и интерполация на комплексни функции [14].

Общо взето, малко е известно кои от известните алгоритми за решаване на различни задачи са непрекъснати по отношение на параметри и за кои задачи съществува непрекъснат алгоритъм[7].

Всички тези проблеми са свързани с локалната и глобалната структура на пространството от всички линейни системи.

Повече от въпросите от този параграф са обсъдени по-подробно в обзора на автора в [29].

Накрая на това бегло, непълно и общо описание на връзките на линейните системи и теорията на управлението с различни дялове на математиката ще отделим няколко думи за филтъра на Калман, (2.10 по-горе). Разглеждаме система, описана от стохастично диференциално уравнение

$$dx=Axdt+Bdw,\ dy=Cxdt+d\nu, \tag{3.3}$$

където w, ν са независими винерови процеси. Задачата се състои в пресмятането на условното очакване $\hat{x}(t)=E[x(t)|y(s),\ 0\leqq s\leqq t]$. Решение на тази задача е филтърът на Калман — Бюси:

$$d\hat{x}=A\hat{x}dt+PC^T\,(dy-C\hat{x}dt),\ dP=(AP+PA^T+BB^T-PC^T\,CP)\,dt.$$

Уравнението за P, което е система от обикновени диференциални уравнения (без стохастичен елемент — един забележителен факт!), е матричното уравнение на Рикати. Това уравнение, изглежда, има обичай да се появява навсякъде в математиката, например в теорията на транспортните задачи, теорията на решенията, задачите за факторизация и т. н., толкова, че на него са посветени монографии [4, 42]. Ще се върнем на филтрацията и на уравнението на Рикати в следващия параграф.

4. Нелинейни системи. След като разполагаме с линейна теория и пред нас възникват нелинейни задачи, можем да опитаме следното: 1) да намерим нелинеен аналог на подхода, който успешно решава задачите в линейния случай и 2) да линеаризираме по един или друг начин.

И двата пътя на изследване са използвани доста интензивно в света на системите и управлението и ще се опитам да кажа тук няколко думи за тях.

4.1. Нелинейна теория на реализуемост. Подходящо средство за линейната теория за реализуемост са ханкеловите форми, или по-точно степенното развитие на преходната функция $F(s)=C(sT-A)^{-1}B$, която свързва лапласовите трансформации на входните и изходните функции. Поне критерият за реализуемост се формулира в термини на ханкелови форми, съответстващи на степенно развитие на тази рационална матрична функция. Тази част от теорията за реализуемост, изглежда, е намерила естествено развитие в рамките на некомутативните степенни редове и редовете на Волтера [34].

Както обикновено, когато се обобщава, възникват нови аспекти. Останалата част от теорията на реализуемост (съществуване и единственост върху гладко многообразие) използва съществена част от апарата на диференциалната топология [35].

4.2. Управляемост, наблюдаемост и стабилизируемост. В линейната теория на системите важна роля играят т. нар. $A \bmod B$ инвариантни подпространства, както и някои техни обобщения и двойствени понятия. Подпространственото $V\subset R^n$ е $A \bmod B$ инвариантно (за системата $\dot{x}=Ax+Bu$), ако съществува матрица на обратна връзка K такава, че V е инвариантно спрямо $A+BK$. С други думи, тогава, когато за кое да е $x(0)\in V$ може да се намери управление $u(t)$ такова, че $x(t)\in V$, $t\geqq 0$. Това понятие е важно при декомпозицията и елиминирането на смущения, вж. т. 2.6 и 2.7 по-горе.

Нелинеен заместител на линейното векторно пространство е снопът от вектори с подпространства, съотвествуващи на подснопове. В този случай се оказва, че вместо да се разглеждат подпространства на подпространството на състояние R^n, трябва да се анализират разпределения, сиреч подснопове на тангенциалния сноп към многообразието на състоянието, а също съответните разслоения. През последните години се очертава нелинейната теория на този кръг от задачи [36, 46, 47, 48]. Ако допуснем, че „всичко върви повече или по-малко добре във „всички възможни светове“, разумно е да предположим, че пречките за стабилизация са в подходящите факторизации.

4.3. Нелинейна филтрация. Това е нелинеен аналог на задачата, накратко описана в т. 2.10. Имаме нелинейна система, зададена със стохастично диференциално уравнение

$$dx=f(x)\,dt+G(x)\,dw, \quad dy=h(x)\,dt+dv.$$

Въпросът е, дали съществува крайномерен рекурсивен филтър за пресмятане на условното очакване $\widehat{x}(t)=E[x(t)/y(s),\ 0\leqq s\leqq t]$. Крайномерният рекурсивен филтър дефинираме като крайномерна система, управлявана от y и с изход $\widehat{x}(t)$:

$$dm=\alpha(m)\,dt+\beta(m)\,dy, \quad \widehat{x}=\gamma(m).$$

Филтърът на Калман — Бюси удовлетворява това условие в линейния случай.

Нека отбележим, че филтърът на Калман — Бюси е тъкмо такова устройство. Една красива идея на Брокет, Кларк и Митер [60, 61] показва, че сложността на филтрационната задача и съществуването на филтъра са свързани със структурата на алгебрата на Ли на диференциалните оператори от стохастични уравнения, които описват еволюцията на ненормираната плътност на $\widehat{x}(t)$, т. нар. уравнение на Дънкан — Мортензен — Закай (DMZ) [49, 50, 51, 52, 53].

Много важни са и въпросите за устойчивост („робастност") на DMZ-уравнението. Тук играе важна роля стохастичното смятане на Малиавен [58, 57].

4.4. Линеаризация. Най-известната и най-изучена задача за линеаризация е задачата, изследвана от Пуанкаре в неговата дисертация. Да разгледаме системата от диференциални уравнения

$$(*)\qquad \dot{x}=f(x),\ f(0)=0,$$
$$f(x)=Ax+\text{членове от по-висок ред.}$$

Задачата е да се покаже кога съществува нелинеен (локален) дифеоморфизъм $\Phi: R^n \to R^n$, $y=\Phi(x)$, който, приложен към системата (*), я прави еквивалентна на линейната ѝ част:

$$\dot{y}=Ay.$$

Същият въпрос може да се постави по-общо за система от m диференциални уравнения

$$\dot{x}_i=f_i(x),\quad f_i(0)=0,\ x_i \in R^n,$$
$$\dot{y}=A_i y,\quad y_i \in R^n.$$

Едно очевидно необходимо условие е алгебрите на Ли, генерирани от векторните полета $f_1, \dots, f_m$ и $A_1, \dots, A_m$, да са изоморфни (по отношение на $f_i \to A_i$). Тази задача е вече съвсем близка до проблема, кога нелинейната управляема система

$$\dot{x}=f(x, u),\ x \in R^n,\ u \in R^m,\ f(0, 0)=0$$

може да бъде линеаризирана, специално когато $f(x, u)$ е от вида $f(x)+\Sigma_{i=1}^m g_i(x)u$.

Този проблем заедно с редица свързани с него въпроси, като например кога е възможна линеаризация при използване на нелинейна обратна връзка, привлича напоследък вниманието на много изследователи. Техниките за линеаризация намират конкретно приложение в управляването на летателни апарати и в роботиката [66, 68, 69, 70, 71, 72]. За линеаризацията на Рикатиевото уравнение от 2.10 вж. [77, 78, 79, 80].

4.5. Други красиви класове от системи. Линейните системи са приятни и ние знаем много за тях, но в много случаи те не са достатъчно богат клас. Абстрактните нелинейни системи от своя страна са прекалено общи и за тях често дори не знаем точните въпроси, на които трябва да дадем отговор. Затова се търсят такива класове от системи, които, от една страна, да бъдат достатъчно регулярни подобно на линейните системи, а от друга — достатъчно различни, за да се появят нови математически феномени. Такива могат да бъдат системите, дефинирани върху групи на Ли, които са хомогенни относно транслация. Както вече няколко пъти става в математическата теория на системите, първата работа в това направление е на Роджер—Брокет [59, 74, 76]. Оказва се, че линейните системи и системите, разглеждани на Брокет, са екстремални случаи на един общ клас от системи, съответстващ на абеловата група на Ли и на полупростата група на Ли.

5. Заключение. Практически всички обсъждани по-горе проблеми са основани на описание, използващо пространството от състояние и това до голяма степен се дължи на идеите на Р. Е. Калман и на големите комерчески успехи от приложенията на филтъра на Калман — Бюси, използващ това описание. Под въпрос е дали тази гледна точка ще се запази в бъдеще при анализа на много големи системи, съставени от голям брой подобни компоненти [65].

При всички случаи обаче е ясно, че много методи, идеи и резултати от алгебричната геометрия, групи и алгебри на Ли, теория на операторите, диференциалната геометрия и топология, алгебричната топология, комплексния анализ, пространствата на Харди, функционалния анализ и т. н. и т. н. ще намерят интересни приложения в теорията на системите и управлението. И обратно, теорията на управлението ще постави трудни задачи в тези области. Както изглежда, тази тенденция ще продължи да се утвърждава и в бъдеще.

Литература

1. I. D. Landau (ed.). Outils et modèles mathématiques pour l'analyse des systèmes et le traitement du signal. Vol. 1—3. Paris, 1981—1984. 2. A. J. van der Schaft. System theoretic description of physical systems. Thesis. Groningen. 1983 (cf. also *Math. Syst. Theory*, 15 (1982), 145-168; *Systems and Control Letters*, 1 (1981), 108—115). 3. M. Hazewinkel. The art of applying mathematics. *Acta Appl. Math.*, 1 (1983), 1—3. 4. M. Hazewinkel. Experimental mathematics. *Computers & Math. and Appl.* (to appear). 5. Proceeding 22nd CDC, San Antonio, 1983, London 1983. 6. R. W. Brockett. Control theory and analytical mechanics. In [64, 1-48]. 7. M. Hazewinkel, C. F. Martin. On decentralisation, symmetry and special structure in linear systems. In [5]. 8. J. Grizzle, S. I. Marcus. The structure of nonlinear control systems possessing symmetries. In [5]. 9. G. Huang, T. J. Tarn-J. W. Clark. On the controllability of quantummechanical systems. *J. Math. Physics*, 24 (1983), 2608-2618. 10. P. Brunovský. On the structure of optimal feedback systems. Proc. IMC Helsinki 1978, 841-846. 11. H. J. Sussmann. Analytic stratification and control theory. Proc. ICM Helsinki 1978. 865-872. 12. I. D. Landau. Deterministic and stochastic model reference adaptive control. In [20]. 387-420. 13. Saridis. Self-organizing control. New York, 1981. 14. A. Tannenbaum. The blending problem and parameter uncertainity in control theory. *Int. J. Control*, 32 (1980), 1-16. 15. G. Segal. The topology of spaces of rational functions. *Acta Math.*, 143 (1979) 39-72. 16. D. Delchamps. (Thesis, Harvard Univ.) 1982. 17. B. Hanzon (Thesis, Erasmum Univ. Rotherdam) 1984. 18. U. Helmke. Geometry of the space of linear systems. Proc. 21st CDC Orlando, 1982. 948-949. 19. P. de Wilde, J. T. Fokkema, I. Widya. Inverse scattering and linear prediction. In [20]. 20. M. Hazewinkel, J. C. Willems (eds). Stochastic systems: the mathematics of filtering and identification and applications. Dordrecht, 1981. 21. S. Fridland. Simultaneous similarity of matrices. *Adv. Math.*, 50 (1983), 189-265. 22. J. C. Willems. Almost invariant subspaces: an approach to high gain feedback design I, II. *IEEE Trans.*, AC 26 (1981), 235-252; ibid. 27 (1982), 1071-1085. 23. C. Byrnes. Compactifications of spaces of systems and dynamic compensators. Proc. 22nd CDC, San Antonio 1983. 24. C. Byrnes. On the control of certain deterministic infinite dimensional systems by algebro-geometric techniques. *Amer. J. Math.*, 100 (1979), 1333-1380. 25. M. Hazewinkel. (Fine) moduli (spaces) for linear systems; what are they and what are they good for. In [29], 125-193. 26. M. Hazewinkel. A partial survey of the uses of algebraic geometry in systems and control theory. In Symp. Math. INDAM, 24 1981, 245-292. 27. M. Hazewinkel. Lectures on invariants, representations and Lie algebras in systems and control theory. In: Sem. d'Algebre P. Dubreil. M. -P. Malliavin 1982. *(Lect. Notes Math. Vol. 1029)*. Berlin 1983, 1-36. 28. C. I. Byrnes, C. F. Martin (eds). Linear systems theory. AMS Lect. Notes Appl. Math. 18, 1983. 29. C. I. Byrnes, C. F. Martin (eds). Geometric methods for linear system theory. Dordrecht, 1980. 30. R. E. Kalman, P. L. Falb, M. A. Arbib. Topics in systems theory. Englewood Cliffs, 1966. 31. M. Fliess. Nonlinear realization theory and abstract transitive Lie algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 2 (1980) 444-446. 32. M. Fliess. Fonctionelles causales nonlinéaires et indeterminés noncommutatives. *Bull. Soc. Math. France*, 109 (1981) 3-40. 33. P. E. Crouch. Polynomic systems theory, a review. *IEE Proc.*, 127 (1980) 220-228. 34. M. Schetzen. The Volterra and Wiener theories of nonlinear systems. New York, 1980. 35. H. J. Sussmann. Existence and uniqueness of minimal realizations of nonlinear systems. *Math. Sys. Theory*, 10 (1977), 263-284. 36. R. Curtain, A. J. Pritchard. Infinite dimensional linear systems theory. *(Lect. Notes Control Inf. Sci. Vol. 8)*, Berlin, 1978. 37. C. Byrnes, P. K. Stevens. Pole placement by static and dynamic output feedback. Proc. 21st CDC. Orlando 1982. 130-137. 38. J. Baillieul, C. I. Byrnes. Remarks on the number of solutions to the load flow equations for a power system with electric losses. Proc. 21 st CDC. Orlando 1982. 919-924. 39. A. W. Marshall, J. Olkin. Inequalities: theory of majorization and its applications. New York, 1979. 40 M. Hazewinkel, C. F. Martin. Representations of the symmetric groups, the specialization order, Schubert cells and systems. *Ens. Math.*, 29 (1983) 53-87. 41. W. T. Reid. Riccati differential equations. New York 1972. 42. C. F. Martin. The Riccati equation. (To appear) Dordrecht., 1985. 43. J. M. Schumacher. Dynamic feedback in finite and infinite dimensional linear systems. *IEEE Trans.* AC 25 (1980), 1133-1138. 44. A. Lindquist, G. Picci. State space models for Gaussian stochastic processes. In [20], 169-204. 45. G. Picci, J. van

Schuppen. On the weak finite stochastic realization problem (Preprint BW 184/83, CWI), Amsterdam. 46. H. Nijmeijer. Nonlinear multivariable control: a differential geometric approach. *Syst. Control Lett.*, 2 (1982), 122-129. 47. A. Isidori et al. Nonlinear decoupling via feedback: a differential approach. *IEEE Trans.* AC 26 (1981). 331. 48. J. M. Schumacher. Finite dimensional regulators for a class of infinite dimensional systems *Syst. Control Lett.*, 3 (1983), 7-12. 49. M. Hazewinkel, S. I. Marcus. On Lie algebras and finite dimensional filtering. *Stochastics*, 7 (1982), 29-62. 50. R. W. Brockett. Nonlinear systems and nonlinear estimation theory. In [20], 441-478. 51. S. K. Mitter. Nonlinear filtering and stochastic mechanics. In [20], 479-504. 52. D. Ocone. Topics in nonlinear filtering theory. Thesis, M. I. T., 1980 (Cf. also [20], 629-636). 53. M. Hazewinkel, S. I. Marcus, H. J. Sussmann. Nonexistence of finite dimensional filters for conditional statistics of the cubic sensor. *Syst. Control Lett.*, 3 (1983), 331-340. 54. O. Hijab. Finite dimensional causal functionals of Brownian motion. In [63], 425-436. 55. M. Hazewinkel. The linear systems Lie algebra, the Segal-Weil representation and all Kalman—Bucy filters. In: Mathematical Theory of Networks and Systems ((*Lecture Notes Contr. Inf. Sci., vol. 58*) Berlin, 1984. 56. C. I. Byrnes. In [55]. 57. D. Michel. Régularité des lois conditionelles en théorie du filtrage non-linéare des variations stochastiques. *J. Funct. Anal.*, 41 (1981), 8-36. 58. M. Chaleyat-Maurel, D. Michel. Hypoelipticity theorems and conditional laws (preprint 1982). 59. R. W. Brockett. Systems theory on group manifolds and coset spaces. *SIAM J. Control*, 10 (1972), 265-284. 60. R. W. Brockett, J. M. C. Clark. The geometry of the conditional density equation. In: Analysis and optimization of stochastic systems. New York, 1980, 299-309. 61. S. K. Mitter. On the analogy between mathematical problems of nonlinear filtering and quantum physics. *Ric. Automat.*, 10 (1980), 163-216. 62. G. Ruckebusch. On the structure of minimal markovian representations. In [63], 111-122. 63. R. S. Bucy, J. M. F. Moura (eds). Nonlinear stochastic problems. Dordrecht, 1983. 64. C. Martin, R. Hermann (eds). Geometric control theory. Math. Sci. Press, 1977. 65. J. Zaborsky. Development of systems science-past, present, and future. (Plenary address) IFAC, Aug. 1984, Budapest. 66. B. Jakubczyk, W. Respondek. On the linearization of control systems. *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astron. Phys.*, 28 (1980), 517-522. 67. R. W. Brokett. Feedback invariants for nonlinear systems. IFAC Congress, Helsinki 1978. 68. L. R. Hunt, S. Su. Linear equivalence of nonlinear time-varying systems. Proc. MTNS 1981 (santa Monica), 119-123. 69. G. Meijer, L. Cicolani. A formal structure for advanced automatic high control systems. NASA TN D-7940 (1975). 70. M. Hazewinkel. Notes on (the philosophy of) linearization. (Preprint ZN, CWI) Amsterdam, 1984. 71. S. Monaco, D. Normand-Cyrot. The immersion under feedback of a multidimensional discrete-time nonlinear system into a linear system. *Int. J. Control*, 38 (1983), 245-261. 72. D. Claude, M. Fliess, A. Isidori. Immersion, discrete et par bouclage, d'un systeme nonlinéaire dans un linéaire. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 296 (1983), 237-240. 73. M. Hazewinkel. Control and filtering of a class of nonlinear but homogeneous systems. *Lecture Notes Control Inf. Sci.*, 39 (1982), 123-146. 74. V. Jurdjevic, I. Kupka. Control systems on semi-simple Lie groups and their homogeneous spaces. *Ann. Inst. Fourier*, 31 (1981), 151-179. 75. B. Bonnard. Controllabilité et observabilité d'une certain classe de systèmes nonlinéaires (preprint). 76. V. Jurdjevic, I. Kupka. Polynomial control systems. (preprint, 1983). 77. C. Martin. Grassmann manifolds and global properties of the Riccati equation. MTNS 1977 (Lubbock Texas), 82-85. 78. R. Hermann, C. Martin. Lie theoretic aspects of the Riccati equation. CDC 1977 (New Orleans). 79. M. Shayman. A symmetry group for the matrix Riccati equation. *Syst. Control Lett.*, 2 (1982), 17-24. 80. J. Harnad, P. Winternitz, R. L. Anderson. Superposition for matrix Riccati equation. *J. Math. Phys.*, 24 (1983), 1062-1072. 81. J. W. Helton. Non-euclidean functional analysis and electronics. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 7 (1982), 1-64. 82. H. Bart., J. C. Gohberg, M. A. Kaashoek. Minimal factorization of matrix and operator valued functions. Basel, 1979. 83. Э. Б. Ли, Л. Маркус. Основы теории оптимального управления. М., 1972. 84. Ю. Н. Андреев. Управление конечномерными линейными объектами. М., 1976. 85. П. Хр. Петков, Н. Д. Христов, М. М. Константинов. Анализ и синтез на линейни многомерни системи. С., 1983. 86. Т. Гичев. Оптимално управление. С., 1981. 87. А. Дончев. Оптимално управление. С., 1985.

Бележки на автора и преводача

[1] Ежегодна конференция, организирана от Института по електротехника и електроника (IEEE) в САЩ. Последната XXV конференция се състоя в Атина през декември 1986 г. — *Бел. прев.*

[2] Съществува безпорядък в терминологията, което впрочем е естествено за една интердисциплинарна област. Първите задачи от днешната теория на управлението възникват през 40-те години в електротехниката. През 50-те години тази област започва да се нарича кибернетика, а през 60-те — теория на системите. У нас техническата наука за управление се нарича автоматика или техническа кибернетика (към които се причисляват и работика, системотехника и т. н.), а съответната математическа област — (математическа) теория на управлението. — *Бел. прев.*

[3] Нека си представим един металически прът с температурни сензори, монтирани в отделни точки, и управляем топлинен източник в единия край.
[4] От дадено множество на допустими управления. — *Бел. прев.*
[5] Макар крайномерната линейна теория на реализуемостта да е в задоволително състояние, има още много какво да се прави по отношение на стохастичния ѝ братовчед [44, 45].
[6] Тук гъмжи от нерешени проблеми и алгоритми, които функционират, без да се знае защо [12, 13].
[7] Става дума за това, дали малки изменения на параметрите могат да нарушат сходимостта на алгоритмите. — *Бел. прев.*
[8] В пълния текст следва обсъждане на методите на диференциалната геометрия, което поради специфичния технически характер е изпуснато при превода.
[9] Литературата от № 82 до № 87 е посочена от преводача. — *Бел. ред.*

Превел А. Дончев

Историко-математически календар за 1986 г.

ЖОЗЕФ ЛУИ ЛАГРАНЖ (1736—1813)

По случай 250-годишнината от рождението му

Занимавам се с геометрия спокойно и в тишина. И тъй като нищо и никой не ме кара да бързам, работя повече за собствено удоволствие, отколкото по задължение: приличам на велможите, обхванати от строителна треска: строя, разрушавам и преустройвам, докато не се получи нещо, което да ме задоволява донякъде. Лагранж.

Писмото от Торино. През август 1755 г. великият Ойлер (1707—1783) получил от Торино писмото на 19-годишния Лагранж, който му бил писал и преди това. Ойлер несъмнено вече си е бил съставил мнението, че неговият кореспондент въпреки младостта си е вече талантлив, зрял математик. И все пак съдържанието на последното писмо поразило учения.

От края на XVII век вниманието на математиците все повече се привличало от задачите, които днес е прието да се наричат вариационни, а тогава обикновено били наричани изопериметрични. Всичко започнало със задачата за брахистохроната — кривата на най-бързо спускане между две точки, поставена от Йохан Бернули (1667—1748). Задачи за криви, притежаващи едно или друго свойство на минимум или максимум, били възникнали и по-рано: при зададена дължина окръжността огражда фигура с най-голямо лице (изопериметрично свойство, което именно дава и наименованието на този клас от задачи), правата е най-краткото разстояние между две точки и т. н. Броят на подобни задачи нараствал и математиците с удоволствие ги решавали, като подбирали за всяка от тях специален секретен ключ.

Стилът на епохата на разцвет на диференциалното и интегралното смятане обаче изисквал да се направи опит за намиране на общ метод, да се създаде специално смятане за решаване на изопериметрични задачи. Забележителните математици, които се били занимавали с тези задачи, интуитивно усещали общи моменти в решенията им. Много направил Якоб Бернули (1654—1705). И все пак картината оставала твърде пъстра и за създаване на един общ метод предстояла още много работа.

Ойлер бил точно на 19 години, когато учителят му Й. Бернули му поставил задачата за брахистохроната в среда със съпротивление. По-късно се появила и задачата за най-късите линии върху повърхнини (геодезическите). Вариационните задачи непрекъснато се намирали в полезрението на Ойлер и към 1732 г. у него изкристализирал общ метод за решаване на такива задачи. Още 12 години отишли за усъвършенстване на метода и през 1744 г. излязъл правещият равносметка мемоар за решаването на „изопериметрични задачи в най-общ смисъл". Методът бил илюстриран върху решенията на повече от 60 най-разнообразни задачи.

Днес ясно разбираме в какво се е състояла трудността при решаването на вариационните задачи: в известен смисъл те били преждевременни за анализа на XVIII век. По това време аналистите се занимавали главно с функции на една променлива и в много по-малка степен с функции на повече променливи. Фигуриращите във вариационните задачи криви обаче като правило не се характеризират посредством краен набор от параметри. Фактически при тези задачи се срещаме с